| | | |
|---|---|---|
| **Université Libanaise**<br>**ISAE - Cnam Liban**<br>**Centre du Liban associé au Cnam Paris** | **Date :** ***Samedi 07 Mai 2016***<br>**Durée :** ***1H30***<br>**De** ***17H*** **à** ***18H30*** | **Semestre :** ***2ième***<br>**Année :** ***2015-2016*** |
| **Code UE :** ***MVA 006***<br>**Intitule de l'UE :** ***Applications de l'analyse à la géométrie, initiation à l'algèbre linéaire.*** | | **Ce sujet comporte :** ***2 pages*** |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Type d'examen :** | **Semestriel** | ☒ Partiel | ☐ Final | ☐ Rattrapage | |
| | **Annuel** | ☐ E1 | ☐ E'1 | ☐ E2 | ☐ E'2 |

**Documents autorisés :** ☐ Tous ☒ Aucun ☐ Autre (A préciser : ……………………………………….)

**Consignes particulières :** *Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en considération. La rigueur et la clarté de votre rédaction entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie. Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.*

**Calculatrice:** ☐ Aucune ☐ Programmable ☒ Non programmable

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Centres concernés** | ☒ **Beyrouth** | ☒ **Baakline** | ☒ **Baalbeck** | ☒ **Nahr Ibrahim** |
| | ☒ **Bickfaya** | ☒ **Ghazza** | ☒ **Tripoli** | |

## ***Exercice 1:*** *(6 points)*

Soit $f$ la fonction de deux variables réelles définie par : $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(1+x^2+y^2)^2-1}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 2 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

1- $f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$ ? Justifier votre réponse.

2- Calculer les dérivées partielles premières de $f$ en $(0,0)$.

3- Calculer les dérivées partielles premières de $f$ en tout point $(x,y)\neq(0,0)$.

4- Peut-on dire que $f$ est de classe $C^1$ en (0, 0) ? Pourquoi ?

5- Déterminer une équation du plan (P), tangent à la surface (S) de $f$, au point de coordonnées (0,0,2).

6- Etudier la position de (S) par rapport au plan (P). Que peut-on dire du point (0,0) pour $f$ ?

7- Déterminer la courbe $\Gamma$ de niveau 3 associée à la fonction $f$ .

8- Soit D le domaine intérieur du plan $Oxy$, limité par la courbe $\Gamma$.
Calculer le volume de la région $\Omega$ de l'espace limitée par la surface (S), le plan $Oxy$ et dont la projection sur le plan $Oxy$ est le domaine D.

## ***Exercice 2:*** *(4 points)*

Considérons la fonction $f$ de deux variables réelles définie par : $f(x,y)=y^2+xy\ln(x)$

1-Quel est le domaine de définition $D_f$ de $f$ ?

2-Calculer les dérivées partielles premières et secondes de $f$ sur $D_f$.

3-Déterminer les points critiques de $f$ sur $D_f$.

4-Etudier les extremums locaux de $f$ sur son domaine.

**Exercice 3:** *(6 points)*

Calculer les intégrales doubles suivantes:

a) $I = \iint_D e^{\frac{y}{\sqrt{x}}} dxdy$ où $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, \quad x^2 < y < \sqrt{x} \}$

b) $J = \iint_D \cos(y^2)\, dxdy$ où $D$ est le domaine limité par les courbes d'équations $y = 2x$, $y = 2$ et $x = 0$

c) $K = \iint_D \dfrac{1}{3x - 2y} dxdy$ où $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x + 2y < 2, \quad 1 < 3x - 2y < 4 \}$

**Exercice 4:** *(4 points)*

Soit (P) une plaque métallique, d'épaisseur négligeable, occupant la région $D$, représentée en noir sur la figure ci-dessous. La densité de masse surfacique de (P) est donnée par $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Calculer alors :

a) la masse $M$ de (P)
b) les coordonnées du centre de gravité G de (P)
c) le moment d'inertie $I$ de (P) par rapport à l'origine O.